

Levenberg-Marquardt 法による可解性を問わない逆運動学

正 杉原知道 (九大)

Solvability-unconcerned Inverse Kinematics by Levenberg-Marquardt Method

*Tomomichi Sugihara (Kyushu Univ.)

Abstract— A robust numerical solution to the inverse kinematics is presented based on Levenberg-Marquardt method, where the squared norm of the residual is used for the damping factor. A rather simple idea remarkably improves numerical stability, convergence performance and computation speed even in unsolvable cases. It is suitable to large-scale structure-varying kinematic chains.

Key Words: Inverse kinematics, Levenberg-Marquardt method, Numerical robustness

1. はじめに

逆運動学は、ロボット工学における基本計算でありながら、未だ困難をはらんでいる。特別な機構を除き、解析解を得ることは一般的に難しく [1, 2]、多くは数値解法に頼ることになる。

数値解法としては Newton-Raphson 法 (NR 法) がよく用いられる。これに必要な基礎ヤコビ行列の効率的な計算法はすでに示されている [3]。しかし、NR 法は大域的収束性を保証せず、初期値依存性が高いことも知られている。加えて逆運動学には次の二つの性質がある。まず、可解性が保証されない。与えられたエフェクタ目標位置・姿勢が作業空間内にない、あるいは拘束条件の数がロボットの自由度より多い (過拘束な) 場合、方程式は不可解となるが、それを事前知することは難しい。逆に、ロボットの冗長性や特異点が原因となり、解が無数に存在する可能性がある。NR 法それ自体は、これらの問題を解消する仕組みを持たない。

従来これらの問題は、主に微分逆運動学の関心であった [3, 4, 5, 6]。Whitney[3] は Moore-Penrose の一般逆行列 (MP 逆行列) を用い、これらを同時に解決することを提案した。中村・花房 [5] は、この方法では特異点近傍で速度の不連続な大変化を招く問題が解決されないことを指摘し、減衰因子を導入した特異点低感度逆行列 (SR 逆行列) を提案した。Wampler[6] も同様の方法を提案し、それが Levenberg-Marquardt 法 (LM 法) [7] の枠組に含まれることに言及している。

人型ロボットのような大規模な構造可変リンク系 [8] において、可解性の問題は冗長性や特異点の問題と同様に深刻である。不可解にならないよう慎重にエフェクタ目標位置・姿勢を配置することは、ロボットの運動設計者や操縦者にとって重荷である。この観点から、逆運動学を方程式の残差最小化問題に置き換えることは合理的であり、微分逆運動学を LM 法における反復計算の 1 ステップとして利用できる。しかし、減衰因

子の選び方と収束性能の関係はあまり議論されていない。他に、基礎ヤコビ行列の一般逆行列ではなく転置行列を用いる最急降下法 (SD 法) [9, 10] や、可変軽量法 (VM 法) を用いる方法 [11] も提案されているが、前者は収束が遅く、また後者はしばしば極小に陥るため信頼性に欠けることが本稿で示される。

本稿では、LM 法による逆運動学解法を特異点問題、冗長性、不可解性のいずれに対してもロバストかつ高速なものとする減衰因子の選び方を提案する。残差の自乗ノルムを減衰因子に用いる単純な方法 [12] が、計算のロバスト性と収束性能の双方を良好にすることを実験的に示す。得られる解は、目標位置・姿勢からの残差を最小にし、問題が可解ならば、特異点や冗長性に関わらず解に収束する。PUMA の運動学モデルを用いて収束性能を数値的に評価する。

2. 数理計画法による逆運動学

運動学は、関節変位ベクトル $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T \in \mathbb{R}^n$ に課せられる代数的拘束条件の組で表現される。ただし n は関節数である。まず、 i 番目拘束条件の残差 e_i を次のように定義する。

$$e_i(\mathbf{q}) \equiv \begin{cases} {}^d\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_i(\mathbf{q}) & (\text{位置拘束}) \\ \mathbf{a}({}^d\mathbf{R}_i \mathbf{R}_i(\mathbf{q})^T) & (\text{姿勢拘束}) \end{cases} \quad (1)$$

ただし $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^3$ 、 ${}^d\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^3$ は関心点の位置とその目標位置、 $\mathbf{R}_i \in SO(3)$ 、 ${}^d\mathbf{R}_i \in SO(3)$ は関心リンクの姿勢とその目標姿勢であり、また任意の $\mathbf{R} \in SO(3)$ に対し $\mathbf{a}(\mathbf{R}) \in \mathbb{R}^3$ は等価角軸表現を意味する。全拘束条件の数を $3N$ とし、系全体の残差ベクトル $\mathbf{e}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3N}$ を

$$\mathbf{e}(\mathbf{q}) \equiv \left[\mathbf{e}_1^T(\mathbf{q}) \ \mathbf{e}_2^T(\mathbf{q}) \ \dots \ \mathbf{e}_N^T(\mathbf{q}) \right]^T \quad (2)$$

と定義すると、逆運動学は次の非線形方程式を解くことに帰着する。

$$\mathbf{e}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (3)$$

従来の NR 法に基づく逆運動学では、適当な初期値 q_0 から出発し、次の更新則によって式 (3) を満たす $q = q^*$ へ至ることを試みる。

$$q_{k+1} = q_k - \nabla e(q_k)^{-1} e_k \quad (4)$$

ただし $e_k \equiv e(q_k)$ とした。 ∇e を、基礎ヤコビ行列 $J(q)$ を用いて次のように置き換えても構わない。

$$\nabla e(q_k) \simeq -J_k \quad (5)$$

ただし $J_k \equiv J(q_k)$ とした。ここにおいて、次の三つの条件が暗に仮定されている。すなわち 1) $n = 3N$, 2) J_k は正方正則行列, 3) 式 (3) は可解である。これらのうちいずれかが破られたとき、反復計算は破綻する。

不可解な場合でも破綻しない逆運動学を議論するために、元の方程式 (3) を次の最小化問題で置き換えよう。

$$E(q) \equiv \frac{1}{2} e(q)^T W_e e(q) \rightarrow \min. \quad (6)$$

ただし $W_e = \text{diag}\{w_{e,i}\}$ ($w_{e,i} > 0$ for $\forall i = 1 \sim 3N$) は拘束条件に対する重み行列である。このような問題の置換は本来等価なものではなく、真の解を見つけることよりも実用的な安全性を優先することを含意する。

問題 (6) に対しても、NR 法は次の形で利用できる。

$$q_{k+1} = q_k + B_k^{-1} g_k \quad (7)$$

$$g_k \equiv J_k^T W_e e_k \quad (8)$$

$$B_k \equiv J_k^T W_e J_k - \sum_{i=1}^n \frac{\partial J_k}{\partial q_i} W_e e_k \quad (9)$$

ただし式 (5) を用いた。しかしこれは計算量を必要とする上に、 B_k が正定値とは限らないため E の減少性を保証しない。一方、LM 法 [7] は次の形で用いられる。

$$q_{k+1} = q_k + H_k^{-1} g_k \quad (10)$$

$$H_k \equiv J_k^T W_e J_k + W_n \quad (11)$$

$W_n = \text{diag}\{w_{n,i}\}$ ($w_{n,i} > 0$ for $\forall i = 1 \sim n$) を減衰因子と呼ぶ。NR 法に対し LM 法は、 $\frac{\partial J_k}{\partial q_i}$ の計算を必要とせず、しかも H_k は常に正則かつ正定値行列となるので E の減少性を保証する。これは Tikhonov 正則化 [13] の最も単純な形であり、次の混合最小化問題を毎回の反復計算で解いているとも解釈できる [5]。

$$\frac{1}{2} r_k^T W_e r_k + \frac{1}{2} \Delta q_k^T W_n \Delta q_k \rightarrow \min. \quad (12)$$

ただし $\Delta q_k \equiv q_{k+1} - q_k$, $r_k \equiv e_k - J_k \Delta q_k$ である。このため冗長系であっても、ある解に収束する。

3. 可解性を問わない逆運動学

W_n の選び方については、微分逆運動学の観点から多くの提案がなされている [14, 12, 15, 16] が、反復計算の収束性能の観点からはほとんど議論されていない。提案方法は、これを次のように定義するものである。

$$W_n = (e_k^T W_e e_k) \mathbf{1} + \bar{W}_n \quad (13)$$

ただし $\mathbf{1}$ は $n \times n$ 単位行列、 $\bar{W}_n = \text{diag}\{\bar{w}_{n,i}\}$, ($\bar{w}_{n,i} > 0$ for $\forall i = 1 \sim n$) は微小なバイアス量である。Chan ら [12] の方法に似るが、 \bar{W}_n の存在が異なる。

簡単のため、 $\bar{W}_n = \bar{w}_n \mathbf{1}$ とし、 $W_e^{1/2} J_k$ を次のように特異値分解したとしよう。

$$W_e^{1/2} J_k = U \Sigma V^T \quad (14)$$

ただし U, V は正規直交行列、 $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_i\}$ は特異値を対角成分に降順に並べた行列 (すなわち $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$) である。このとき、

$$\begin{aligned} H_k &= V \Sigma U^T U \Sigma V^T + (e_k^T W_n e_k + \bar{w}_n) \mathbf{1} \\ &= V \{ \Sigma^2 + (e_k^T W_n e_k + \bar{w}_n) \mathbf{1} \} V^T \end{aligned} \quad (15)$$

なので、 H_k の条件数 κ は次のようになる。

$$\kappa = \|H_k\| \cdot \|H_k^{-1}\| = \frac{\sigma_1^2 + e_k^T W_n e_k + \bar{w}_n}{\sigma_n^2 + e_k^T W_n e_k + \bar{w}_n} \quad (16)$$

これより次のことが言える。

- I) 方程式 (3) が可解であり、解が特異点から離れていけば、 W_n は \bar{W}_n に二次収束し、反復計算は超一次収束する [17]。
- II) 方程式 (3) が可解であり、解が特異点に近ければ、 κ は $\frac{\sigma_1^2 + \bar{w}_n}{\bar{w}_n}$ に近づく。したがって \bar{w}_n は H_k の退化を防ぐために必要である。 \bar{w}_n の定め方には議論の余地があるが、解近傍では $g_k \simeq 0$ となるのでそれほど重要な問題ではない。
- III) 方程式 (3) が不可解ならば、 e_k の増加に伴って κ は 1 に近づく。 $\|g_k\|$ は増大する一方で、降下ベクトルの絶対値 $\|H_k^{-1} g_k\| \simeq \frac{1}{\|e_k\|}$ は小さくなる。

大域的収束性を保証するためには、Moré-Thuente 法 [18] などの一次探索アルゴリズムと組み合わせる必要がある。しかしながら次章において、一次探索を行わなくても十分な収束性能を持つことが実験的に示される。

4. 評価

Fig.1 に示す PUMA モデルを用いて、収束性能および計算時間の観点から次の方法を比較評価した。

- SD: 最急降下法
- NR-MP: 重み付き MP 逆行列を用いた NR 法

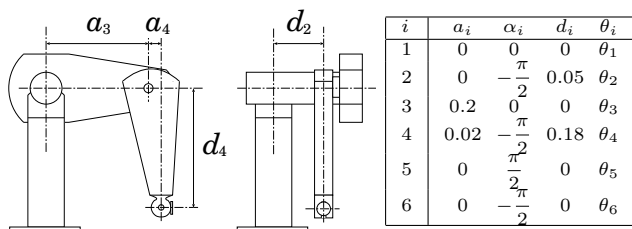


Fig.1 Kinematics model of a PUMA robot with modified DH parameters.

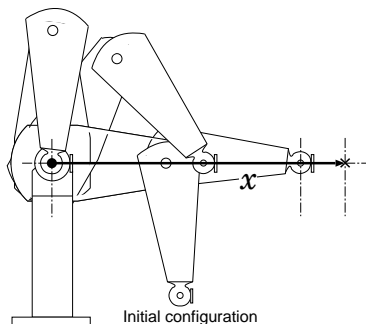


Fig.2 The target position of the endpoint is moved from (0.1,0.05,0) to (3.1,0.05,0) step-by-step.

- VM-LS: VM 法 (BFGS 公式+Moré-Thuente 法)
- VM: VM 法 (BFGS 公式, 一次探索なし)
- LM ($\lambda = \text{const.}$): LM 法 ($W_n = \lambda \mathbf{1}$ で固定)
- LM-NH: LM 法 (中村・花房の方法 [5])
- LM (proposed): LM 法 (提案方法)

NR-MP は LQ 分解を用いて実装し, SD における更新則は次式とした.

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{e}_k^T \mathbf{W}_e \mathbf{e}_k}{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k} \mathbf{g}_k \quad (17)$$

LM-NH は, 次の定義を用いたものである.

$$\mathbf{W}_n = k \left(1 - \min \left\{ \frac{\sqrt{\det \mathbf{J} \mathbf{J}^T}}{w_0}, 1 \right\} \right)^2 \mathbf{1} \quad (18)$$

ただし k, w_0 は定数であり, 本稿の試行では $k = 0.1$, $w_0 = 2.0 \times 10^{-4}$ とした. また提案方法では $\bar{w}_n = 1.0 \times 10^{-3}$ とした. 全ての反復計算において $W_e = \mathbf{1}$, $\mathbf{q}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ (これが特異点であることに注意されたい) とし, 次の条件のうちいずれかが満たされた時点で終了とした.

1. $\|\Delta \mathbf{q}_k\|$ の全成分が $\epsilon = 1.0 \times 10^{-12}$ 未満
2. $\|\mathbf{e}_k\|$ の前回からの変化分が $\delta = 1.0 \times 10^{-12}$ 未満
3. 反復回数が 10000 回超

エフェクタ目標位置・姿勢は

$${}^d \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0.1 + \frac{3.0m}{50} \\ 0.05 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^d \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

とし, $m \in \mathbb{N}$ を 0 から 49 へと 1 ずつ変化させた. ロボット腕部の最大伸展長は約 0.38[m] なので, $m \geq 4$ のときに逆運動学は不可解となり, 収束時の残差は (計算成功時には) m に対し直線状に増加する. 計算終了時の残差ノルムを比較したものを Fig.3 (左:SD, NR-MP および提案方法, 中央:LM ($\lambda = 0.001, 0.01, 0.1$), LM-NH および提案方法, 右:VM-LS, VM および提案方法) に示す. NR-MP が成功したのは $m = 1, 2, 3$ のときだけであった. SD も $m \geq 8$ のほとんどの場合で失敗した. LM ($\lambda = \text{const.}$) については, λ が大きいほど成功する領域が広がっているが, いずれも m がある値を超えると失敗している. LM-NH については, $\lambda = 0.01$ よりも成功回数が多い k, w_0 の組み合わせを見つけることはできなかった. VM-LS は全て数ステップで解以外の極小に陥った. 一次探索を行わない VM の方が収束性能の点でむしろ良好な結果を示しているが, 試行の 40% は失敗した. 提案方法による全ての結果が成功したことは特筆に値する.

計算時間の比較結果を Fig.4 に示す. ただし VM-LS および VM は評価対象に含んでいない. 提案方法を除いた全ての方法は, m がある値を超えると収束せず反復回数制限によって終了した. SD は逆行列計算 (一次方程式の求解) を伴わないので, 終了までの平均時間は他に比べて短くなっている. また, $m \leq 4$ の結果を拡大したものを Fig.5 に示す. LM において減衰因子を固定した場合, 収束性能と計算時間にトレードオフが存在することが, Fig.3 中央および Fig.5 からわかる. 計算時間の点では LM ($\lambda = 0.001$) と LM-NH のみが提案方法に比肩するが, これらの収束限界は低い.

以上より, 上記の試行においては提案方法のみ実用性があると言える.

5. おわりに

LM 法による逆運動学の数値解法において, 単純な方法ながら, 特異点や冗長性, 問題の不可解性に対してもロバストに収束する計算方法を提案した. ロボット工学に必ずしも精通していないユーザでも多様なロボットの運動を容易に計画できるようにするための, 基礎ツール開発に応用されると期待する.

本研究は, 科学研究費補助金若手研究 (B) (課題番号: 20760170) および次世代研究スーパースター養成プログラム (九州大学総長裁量経費) の支援を受けた.

参考文献

- [1] D. L. Pieper. *The Kinematics of Manipulators under Computer Control*. PhD thesis, Stanford University, 1968.
- [2] M. Raghaven and B. Roth. Kinematic Analysis of the 6R Manipulator of General Geometry. In *Proceedings of The Fifth International Symposium on Robotics Research*, pp. 263–269, 1991.

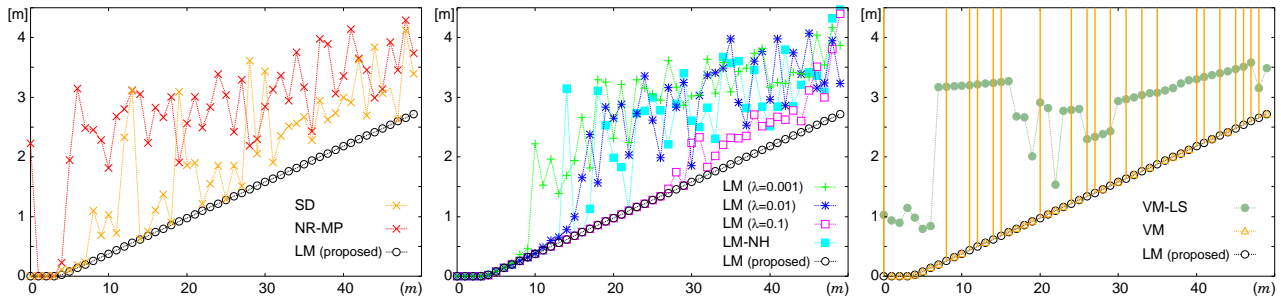


Fig.3 Error comparison between SD, NR-MP (left), LM ($\lambda = \text{const.}$), LM-NH (middle), VM-LS and VM (right).

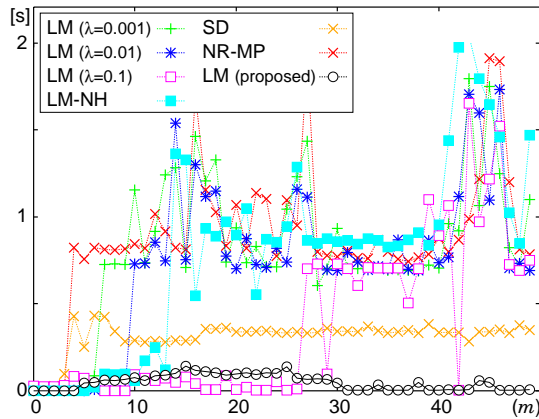


Fig.4 Computation time comparison between SD, NR-MP and LM family.

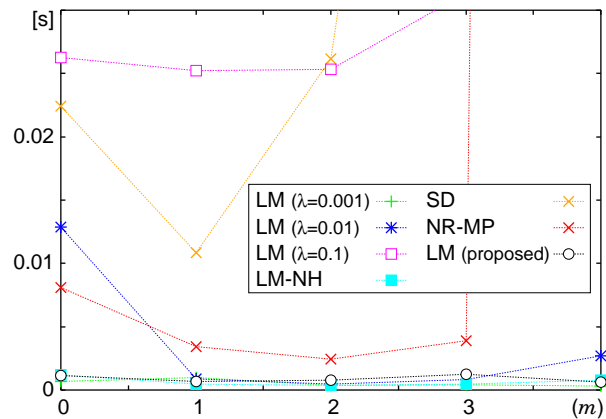


Fig.5 Zoom-up of Fig.4 in solvable range.

- [3] D. E. Whitney. The Mathematics of Coordinated Control of Prosthetic Arms and Manipulators. *Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 94, No. 4, pp. 303–309, 1972.
- [4] J. Baillieul. Kinematic Programming Alternatives for Redundant Manipulators. In *Proceedings of the 1985 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, pp. 722–728, 1985.
- [5] 中村仁彦, 花房秀郎. 関節型ロボットアームの特異点低感度運動分解. *計測自動制御学会論文集*, Vol. 20, No. 5, pp. 453–459, 1984.
- [6] H. C. W. Wampler. Manipulator Inverse Kinematic Solutions Based on Vector Formulations and Damped Least-Squares Methods. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-16, No. 1, pp. 93–101, 1986.
- [7] D. W. Marquardt. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 11, No. 2, pp. 431–441, 1963.
- [8] Y. Nakamura and K. Yamane. Dynamics Computation of Structure-Varying Kinematic Chains and Its Application to Human Figures. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 16, No. 2, pp. 124–134, 2000.
- [9] W. A. Wolovich and H. Elliot. A Computational Technique for Inverse Kinematics. In *Proceedings of the 23rd IEEE conference on Decision and Control*, pp. 1359–1363, 1984.
- [10] A. Balestrino, G. de Maria, and L. Sciavicco. Robust Control of Robotic Manipulators. In *Proceedings of the 9th IFAC World Congress*, Vol. 5, pp. 2435–2440, 1984.
- [11] J. Zhao and N. I. Badler. Inverse Kinematics Positioning Using Nonlinear Programming for Highly Articulated Figures. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 13, No. 4, pp. 313–336, 1994.
- [12] S. K. Chan and P. D. Lawrence. General Inverse Kinematics with the Error Damped Pseudoinverse. In *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 834–839, 1988.
- [13] G. H. Golub, P. C. Hansen, and D. P. O’Leary. Tikhonov Regularization and Total Least Squares. *SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications*, Vol. 21, No. 1, pp. 185–194, 1999.
- [14] S. Chiaverini. Estimate of the Two Smallest Singular Values of the Jacobian Matrix: Applications to Damped Least-Squares Inverse Kinematics. *Journal of Robotic Systems*, pp. 991–1008, 1988.
- [15] A. A. Maciejewski and C. A. Klein. The Singular Value Decomposition: Computation and Applications to Robotics. *International Journal of Robotic Research*, Vol. 8, pp. 63–79, 1989.
- [16] A. S. Deo and I. D. Walker. Robot Subtask Performance with Singularity Robustness Using Optimal Damped Least Squares. In *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 434–441, 1992.
- [17] N. Yamashita and M. Fukushima. On the rate of convergence of the Levenberg-Marquardt method. Technical Report 2000-008, Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University, 2000.
- [18] J. J. Moré and D. J. Thuente. Line Search Algorithms with Guaranteed Sufficient Decrease. *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 20, No. 3, pp. 286–307, 1994.