

乗数法による優先度付き逆運動学のロバスト解法

杉原 知道^{*1}

Robust Solution of Prioritized Inverse Kinematics Based On Multiplier Method

Tomomichi Sugihara^{*1}

^{*1} Department of Adaptive Machine Systems, Graduate School of Engineering, Osaka University
2-1 Yamadaoka, Suita, Osaka 565-0871, Japan

A robust numerical solution of prioritized inverse kinematics is proposed. It is based on the augmented Lagrangian function and the multiplier method, which only requires an increment of residual with respect to the highly-prioritized constraint at each step of iteration of an ordinary inverse kinematics with weights. Hence, it is preferable because of its easy implementation to the conventional method which utilizes kernel space of the robot configuration and thus requires complex matrix computations. More than that, the proposed method is robust even in cases where the highly-prioritized constraint is unsatisfiable.

Key Words : Prioritized inverse kinematics, Numerical solution, Multiplier method

1. はじめに

逆運動学は、作業空間においてロボットに要求される運動、端的には効果器の位置・姿勢から、ロボットの関節変位を逆算する計算である。運動への要求は、ロボットが実現できる運動と無関係にいかようにも与えられ得るので、どのような関節変位の組をもってしても、それらの要求を全て同時に満たすことが不可能な場合がある。そのような場合に、作業目的や物理的制約に基づいて、要求を厳密に満たすことが求められるもの（高優先度拘束条件）とそうでないもの（低優先度拘束条件）とに分類し、後者は努力目標としてのみ与え誤差を最小化することで解を求める方法がある。これは優先度付き逆運動学⁽¹⁾と呼ばれる。

逆運動学は複雑な非線形連立方程式の求解問題であり、特殊な機構^{(2)~(5)}を除けば、解析的に解を求めることは一般的に不可能である。したがって多くの場合、微分逆運動学を一つの基盤とする数値解法に頼ることになる。優先度付き逆運動学も、従来はもっぱら微分逆運動学の文脈で議論されてきた⁽¹⁾⁽⁶⁾。よく知られているように、ある姿勢における効果器の無限小変位と関節の無限小変位は線形な関係で結びつけられる⁽⁷⁾。この関係に基づいて、関節変位空間に核空間が存在する、すなわち効果器の運動に影響をおよぼさない関節変位の集合が空でないならば、これを利用して低優先度拘束条件の誤差を最小化する（高優先度拘束条件は

像空間において満たす）という考え方である。

この考え方には、次の3つの問題がある。

- I) 一般的な逆運動学と同様に、高優先度拘束条件を満足する解の存在は保証されない。また、そのような解が存在するか否かを事前に判別することは容易でない。杉原⁽⁸⁾が指摘したように、方程式が不可解な場合、誤差最小解は必ず特異点に向かうので、最悪の場合計算が破綻する。これはロボットの運用において、解の厳密性を失うよりも危険である。
- II) 核空間を利用した誤差最小化の計算は、行列同士の積や逆行列を幾つも求めなければならない重い計算である。
- III) そもそも解きたいのは元の非線形連立方程式であって、反復計算における毎回の計算ステップでその超接平面の像空間・核空間を厳密に云々することはそれほど重要ではない。計算の複雑さに効果が見合わない。

本稿では、一般的な等式制約付き最小二乗問題の解法である乗数法⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾を応用した、優先度付き逆運動学の新たな数値解法を提案する。これは、関節変位と同時にその随伴変数（Lagrange 乗数）も反復的に求める方法である。実質的に杉原⁽⁸⁾が提案した Levenberg-Marquardt 法（LM 法）による解法をわずかに修正するだけで実装でき、毎回の計算ステップで核空間を陽に求めることなく、高優先度拘束条件を満足する解が存在する場合はそれに高速に収束する。関節変位は超

^{*1} 大阪大学大学院工学研究科知能・機能創成工学専攻（〒565-0871 大阪府吹田市山田丘 2-1）zhidao@iecc.org

1 次収束する一方、Lagrange 乗数は 1 次収束する解法であるため、原理的に、高優先度拘束条件を満足する解が存在しない場合の収束性が悪いことが問題として残っているが、ロバストに解を求めることができる。実際、幾つかの従来方法と比較したところ、成功率は唯一 100%であった。

2. レビュー：優先度付き逆運動学

作業空間において要求される運動が、複数のリンクの位置または姿勢の目標値で与えられるとしよう。すなわち関節変位ベクトル $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T \in \mathbb{R}^n$ に対し、身体上の i 番目の関心点の位置とその目標位置をそれぞれ $\mathbf{p}_i(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^3$ および ${}^d\mathbf{p}_i(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^3$ 、 i 番目の関心リンクの姿勢とその目標姿勢をそれぞれ $\mathbf{R}_i(\mathbf{q}) \in SO(3)$ および ${}^d\mathbf{R}_i(\mathbf{q}) \in SO(3)$ と定義すると、ロボットの逆運動学は次のような非線形方程式を解くことに帰着する。

$$\mathbf{e}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

ただし、位置・姿勢に関する残差ベクトルを

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{q}) \equiv \begin{cases} {}^d\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_i(\mathbf{q}) & (\text{位置拘束}) \\ \mathbf{a}({}^d\mathbf{R}_i\mathbf{R}_i(\mathbf{q})^T) & (\text{姿勢拘束}) \end{cases} \quad (2)$$

(任意の $\mathbf{R} \in SO(3)$ に対し $\mathbf{a}(\mathbf{R}) \in \mathbb{R}^3$ は等価角軸ベクトルを意味する) と定義し、

$$\mathbf{e}(\mathbf{q}) \equiv [\mathbf{e}_1^T(\mathbf{q}) \ \mathbf{e}_2^T(\mathbf{q}) \ \dots \ \mathbf{e}_N^T(\mathbf{q})]^T \quad (3)$$

とした。

${}^d\mathbf{p}_i$ および ${}^d\mathbf{R}_i$ は、ロボットの運動学的制約と無関係にいかようにも与えられ得るので、方程式 (1) の可解性は一般的に保証されない。そこで $\mathbf{e}(\mathbf{q})$ を、厳密に $\mathbf{0}$ とすることが望まれるもの (高優先度拘束条件) と、 $\mathbf{0}$ とできないまでも可能な範囲で最小化することが望まれるもの (低優先度拘束条件) の二種類に分類し、前者を $\mathbf{e}_S(\mathbf{q})$ 、後者を $\mathbf{e}_W(\mathbf{q})$ とそれぞれおくと、優先度付き逆運動学は、次のような等式制約条件付き 2 次計画問題として定式化される。

$$E \equiv \frac{1}{2} \mathbf{e}_W^T \mathbf{W}_W \mathbf{e}_W \rightarrow \min. \quad \text{subject to } \mathbf{e}_S = \mathbf{0} \quad (\text{QP1})$$

ただし、 $\mathbf{e}_W(\mathbf{q})$ 、 $\mathbf{e}_S(\mathbf{q})$ をそれぞれ \mathbf{e}_W 、 \mathbf{e}_S と略記した。また \mathbf{W}_W は正定値重み行列であり、通常は対角行列として与える。これに対し、Lagrange 関数を次のように定義する。

$$L \equiv \frac{1}{2} \mathbf{e}_W^T \mathbf{W}_W \mathbf{e}_W + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{e}_S \quad (4)$$

ただし、 $\boldsymbol{\lambda}$ は Lagrange 乗数である。このとき、問題 (QP1) の最適解においては次が成り立つ。

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = -\mathbf{J}_W^T \mathbf{W}_W \mathbf{e}_W - \mathbf{J}_S^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^T = \mathbf{e}_S = \mathbf{0} \quad (6)$$

ただし、

$$\frac{\partial \mathbf{e}_W}{\partial \mathbf{q}} \simeq -\mathbf{J}_W \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_S}{\partial \mathbf{q}} \simeq -\mathbf{J}_S \quad (8)$$

を用いた。 \mathbf{J}_W および \mathbf{J}_S はそれぞれ元の対応する身体位置・リンク姿勢に関する基礎ヤコビ行列である。結局問題は、上記の連立方程式を解くことに帰着する。

Newton-Raphson 法を原形とする勾配法では、まず式 (5) および (6) を、反復計算における k ステップ目の $\mathbf{q} = \mathbf{q}_k$ についてそれぞれ次のように線形化する。

$$\mathbf{J}_{Wk}^T \mathbf{W}_W \mathbf{J}_{Wk} \Delta \mathbf{q}_k + \mathbf{J}_{Sk}^T \boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{J}_{Wk}^T \mathbf{W}_W \mathbf{e}_{Wk} \quad (9)$$

$$\mathbf{J}_{Sk} \Delta \mathbf{q}_k = \mathbf{e}_{Sk} \quad (10)$$

ただし、 $\mathbf{J}_{Wk} = \mathbf{J}_W(\mathbf{q}_k)$ 、 $\mathbf{J}_{Sk} = \mathbf{J}_S(\mathbf{q}_k)$ 、 $\mathbf{e}_{Wk} = \mathbf{e}_W(\mathbf{q}_k)$ 、 $\mathbf{e}_{Sk} = \mathbf{e}_S(\mathbf{q}_k)$ とそれぞれおいた。これを、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{Wk}^T \mathbf{W}_W \mathbf{J}_{Wk} & \mathbf{J}_{Sk}^T \\ \mathbf{J}_{Sk} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}_k \\ \boldsymbol{\lambda}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{Wk}^T \mathbf{W}_W \mathbf{e}_{Wk} \\ \mathbf{e}_{Sk} \end{bmatrix} \quad (11)$$

とまとめて解くことにより $\Delta \mathbf{q}_k$ が得られれば、 $\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \Delta \mathbf{q}_k$ と更新することで、連立方程式 (5) (6) の解に漸近収束することが期待される。 $\boldsymbol{\lambda}_k$ は毎回の計算で直接求まることに注意されたい。

ここにおいて問題は、 \mathbf{J}_{Sk} および \mathbf{J}_{Wk} のサイズおよびランクについては何も保証されず、したがって式 (11) の左辺の係数行列の正則性・正定値性とも保証されないことである。Moore-Penrose の逆行列 (MP 逆行列) を用いればこれを $\Delta \mathbf{q}_k$ について形式的に解くことはできるが、特異点近傍で数値的に不安定化することが避けられない。優先度付き逆運動学は生来、不可解な方程式の求解問題なので、その解はしばしば特異点近傍に集まる。したがってこの方法では、多くの場合反復計算が収束しない。

ところで、 $\boldsymbol{\lambda}$ を直接求めることなく式 (11) を解くことも可能である。以降、任意の行列 \mathbf{A} に対して $\mathbf{A}^\#$ を \mathbf{A} の重み付き MP 逆行列と定義する。式 (10) の一般解は、次のように表される。

$$\Delta \mathbf{q}_k = \mathbf{J}_{Sk}^\# \mathbf{e}_{Sk} + \mathbf{N}_{Sk} \mathbf{y} \quad (12)$$

ただし、 $\mathbf{N}_S \equiv \mathbf{J}_S^\# \mathbf{J}_S - \mathbf{1}$ は \mathbf{J}_S の核空間基底行列であり、 $\mathbf{N}_{Sk} \equiv \mathbf{N}_S(\mathbf{q}_k)$ とおいた。また、 \mathbf{y} は任意の $n \times 1$ ベクトルである。 \mathbf{y} を新たな設計変数とすると、問題 (QP1) の最適解においては次が成り立つ。

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \mathbf{y}}\right)^T = \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{J}}_W^T \mathbf{W}_W \tilde{\mathbf{J}}_W \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{J}}_W^T \mathbf{W}_W (\mathbf{e}_W - \mathbf{J}_W \mathbf{J}_S^\# \mathbf{e}_S) \quad (13)$$

ただし、 $\tilde{\mathbf{J}}_W = \mathbf{J}_W \mathbf{N}_S$ とおいた。これより

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{J}}_{Wk}^\# (\mathbf{e}_{Wk} - \mathbf{J}_{Wk} \mathbf{J}_{Sk}^\# \mathbf{e}_{Sk}) \quad (14)$$

とする。ただし $\tilde{\mathbf{J}}_{Wk} \equiv \tilde{\mathbf{J}}_W(\mathbf{q}_k)$ である。これを式 (12) に代入すれば、

$$\Delta \mathbf{q}_k = \mathbf{J}_{Sk}^\# \mathbf{e}_{Sk} + \mathbf{N}_{Sk} \tilde{\mathbf{J}}_{Wk}^\# (\mathbf{e}_{Wk} - \mathbf{J}_{Wk} \mathbf{J}_{Sk}^\# \mathbf{e}_{Sk}) \quad (15)$$

を得る。この方法は花房・吉川・中村⁽¹⁾によって提案された。

上記の方法は、一見して行列同士の積や MP 逆行列等を求める重い計算であることが分かる。式 (14) のような連立方程式の MP 逆行列解の求解は、一般的に MP 逆行列を直接求める必要はなく、途中計算を工夫することによって計算量を $O(n^2)$ とできる。しかし式 (12) における \mathbf{N}_{Sk} の計算では、MP 逆行列を直接求めなければならない。これは計算量が $O(n^3)$ となる。また、MP 逆行列解の特異点近傍における脆弱さも残ったままである。さらに計算が複雑であることは、実装時に瑕疵が混入する確率を高めることにつながる。以上のようにこの方法は、微分逆運動学における同問題の解法としては数学的に理にかなっていないが、一般的逆運動学の解法としてはコストに見合わない。

中村・花房⁽¹¹⁾は、式 (14) において MP 逆行列の代わりに特異点低感度逆行列 (SR 逆行列) を用いることを提案している。式 (12) において SR 逆行列を用いることも、形式的に可能である。これにより、特異点近傍での不安定化は低減できるが、計算の複雑さの観点からは依然不利である。

高優先度拘束条件を満たす関節変位 \mathbf{q} の集合は、多様体を形成する。今議論しているのは、その多様体上に拘束された \mathbf{q} の振る舞いであって、多様体の超接平面上に拘束された \mathbf{q} の振る舞いではないことに注意すべきであろう。すなわち、超接平面の像空間・核空間を云々することは本質的でない。

3. 乗数法と LM 法を併用したロバスト解法

乗数法は、Hestenes⁽⁹⁾および Powell⁽¹⁰⁾によって提案された、等式制約条件付き 2 次計画問題の反復解法である。設計変数と Lagrange 乗数を同時に更新してい

きながら、等式制約条件に対応する多様体上にあつて目的関数を最小化する点に漸近する。

この方法では、式 (4) の代わりに次の拡張 Lagrange 関数を用いる。

$$L' \equiv \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{W}_E \mathbf{e} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{e}_S \quad (16)$$

ただし、

$$\mathbf{e} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{e}_S \\ \mathbf{e}_W \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_E \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_W \end{bmatrix} \quad (17)$$

とおいた。これは、2 次計画問題 (QP1) を次のように変形したのと同義である。

$$E' \equiv \frac{1}{2} \mathbf{e}_S^T \mathbf{e}_S + \frac{1}{2} \mathbf{e}_W^T \mathbf{W}_W \mathbf{e}_W \rightarrow \min. \\ \text{subject to } \mathbf{e}_S = \mathbf{0} \quad (QP2)$$

問題 (QP2) の最適解においては次が成り立つ。

$$\left(\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{q}}\right)^T = -\mathbf{J}_W^T \mathbf{W}_W \mathbf{e}_W - \mathbf{J}_S^T (\mathbf{e}_S + \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0} \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial L'}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^T = \mathbf{e}_S = \mathbf{0} \quad (19)$$

式 (19) に注意すれば、これは式 (5) (6) と同値になっている、すなわち問題 (QP2) の最適解は元の問題 (QP1) の最適解でもあることが分かる。さらに式 (5) と式 (18) を比較すれば、ある $\boldsymbol{\lambda}$ が与えられた下で L' を最小化する \mathbf{q} を求めたとき、そのときの $\mathbf{e}_S + \boldsymbol{\lambda}$ は最適解における Lagrange 乗数により近づいていることが期待される。詳細な議論は原論文を参照されたい。

以上の考え方にに基づき、LM 法を基本とした場合の乗数法の更新則は、次の通りである。

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + (\mathbf{J}_k^T \mathbf{W}_E \mathbf{J}_k + \mathbf{W}_{Nk})^{-1} \mathbf{J}_k^T \mathbf{W}_E \mathbf{e}'_k \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{k+1} = \boldsymbol{\lambda}_k + \mathbf{e}_{Sk} \quad (21)$$

ただし

$$\mathbf{J}_k \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{Sk} \\ \mathbf{J}_{Wk} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}'_k \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{Sk} + \boldsymbol{\lambda}_k \\ \mathbf{e}_{Wk} \end{bmatrix} \quad (22)$$

とおいた。また、 \mathbf{W}_{Nk} は LM 法における減衰因子である。なお原論文の方法では、与えられた $\boldsymbol{\lambda}_k$ に対する L' の無制約最小化と、 $\boldsymbol{\lambda}_k$ の更新を交互に反復する二段階最適化を行っているが、本稿で紹介する方法では、 \mathbf{q}_k と $\boldsymbol{\lambda}_k$ を毎ステップ同時に更新している。

上記の更新則は、LM 法による重み付き逆運動学⁽⁸⁾のそれに対して、式 (21) により高優先度拘束条件の誤差を累積し、これを用いて \mathbf{e}_k を \mathbf{e}'_k に置き換えるだけの違いである。すなわち重み付き逆運動学と、実装

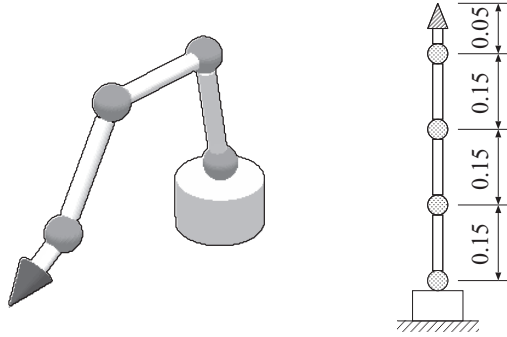


Fig. 1 Kinematics model of the tested redundant manipulator comprising five links and four spherical joints

コストおよび毎ステップの計算コストがほとんど変わらない。また等式制約条件を満たす \mathbf{q} が存在しない、すなわち不可解な場合であっても、ロバストに \mathbf{e}_S のノルムを最小化することも期待される。ただし、 \mathbf{q}_k が超 1 次収束するのに対し、 λ_k は 1 次収束することが難点として挙げられる。

なお、姿勢拘束に関しては誤差ベクトルは角軸表現を用いているため、直接加算することは適切でない。筆者の実装では、例えば高優先度拘束条件に含まれる \mathbf{e}_i が姿勢拘束ならば、次のように計算を置き換えている。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}_i) \quad (23)$$

$$\lambda_{i,k+1} = \frac{\lambda_{i,k} + \boldsymbol{\varepsilon}_i}{\|\lambda_{i,k} + \boldsymbol{\varepsilon}_i\|} \quad (24)$$

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}(\lambda_{i,k}) \quad (25)$$

ただし、 $\lambda_{i,k}$ は \mathbf{e}_i に対応する随伴変数の反復計算 k ステップ目における値、 $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e})$ は角軸ベクトル \mathbf{e} をオイラーパラメータ（単位クォータニオン）に変換する関数、 $\mathbf{e}(\boldsymbol{\varepsilon})$ はオイラーパラメータを角軸ベクトルに変換する関数である。

4. 評価

図 1 に示すような冗長マニピュレータモデルを用いて、ロバスト性および計算時間の観点から提案方法を評価した。このモデルは文献⁽⁸⁾に用いられたのと同じのもので、5つのリンクが4つの球面関節によって直鎖状に連結され、12自由度を持つ。各関節間の長さはすべて 0.15[m]、エフェクタ関節中心からエンドポイントまでの長さは 0.05[m] である。以下において、エフェクタ位置とはエンドポイント位置を意味する。

実施した試験は次の 2 種である。

試験 1: 図 2 のように、手先点 1 (Point 1 とする) を位置 (0,0.4,0) に拘束したまま、第 3 関節中心

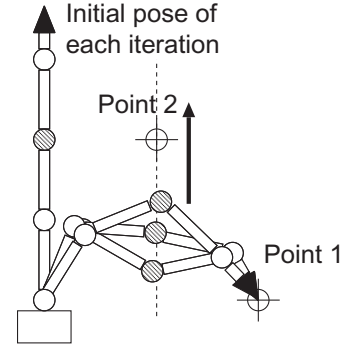


Fig. 2 Test 1: prioritized IK with solvable constraint, where the target of Point 1 (highly-prioritized constraint) is fixed while that of Point 2 (lowly-prioritized constraint) moves upward as to be out of reach.

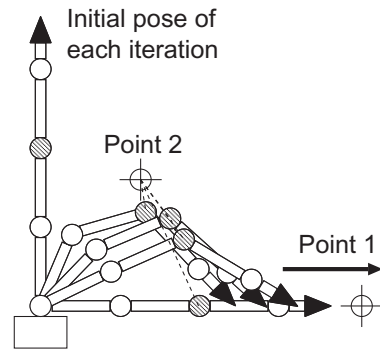


Fig. 3 Test 2: prioritized IK with unsolvable constraint, where the target of Point 1 (highly-prioritized constraint) moves forward as to be out of reach, while that of Point 2 (lowly-prioritized constraint) is fixed.

(Point 2 とする) をできるだけ位置 (0,0.2,0.005*i*) に近づける。ただし *i* は 0 から 100 までの整数値

試験 2: 図 3 のように、Point 2 の目標位置を (0,0.2,0.5) としたまま、Point 1 の目標位置を (0,0.4+0.004*i*,0) とする。ただし *i* は 0 から 100 までの整数値

比較のために、次の 6 種類の方法で計算を行った。

- $w = 1.0$: 重み付き逆運動学, 文献⁽⁸⁾の方法, ただし高優先度拘束条件の重みを 1.0 としたもの
- $w = 10.0$: 同上, 高優先度拘束条件の重みを 10.0 としたもの
- $w = 100.0$: 同上, 高優先度拘束条件の重みを 100.0 としたもの
- HYN-MP: 優先度付き逆運動学, 花房・吉川・中村⁽¹⁾の方法, ただし式 (14) において SR 逆行列を

用いる

- HYN-SR:同上, 式 (12) および式 (14) において SR 逆行列を用いる
- Proposed:提案方法

HYN-MP で必要となる MP 逆行列および核空間基底行列の計算方法は, 付録に記す. 参考までに, HYN-MP は Yamane ら⁽¹²⁾において採用されている. また, 低優先度拘束条件の重みは全て 1.0 とした. 初期値は毎回 $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$ にリセットした. これが特異点であることに注意されたい. 反復計算はすべて, 次の条件のうちいずれかが満たされた時点で終了とした.

- $\Delta \mathbf{q}_k$ のすべての成分が $\epsilon = 1.0 \times 10^{-12}$ 未満
- $\|\mathbf{e}_k\|$ の前回からの変化分が $\delta = 1.0 \times 10^{-12}$ 未満
- 反復回数が 10,000 回を超えた

試験 1 の結果を図 4 に示す. 同図 (a) は, 高優先度拘束条件の誤差である. 重み付き逆運動学解法では, 高優先度拘束条件の重みが 10 倍, 100 倍と増えるに従って, 誤差は徐々に低減していくが, どんなに重みを増やしても, 低優先度拘束条件の目標値が離れるに従って誤差は増加する, すなわち与えられた任意の目標値の組に対し誤差を確実に閾値以下にすることは保証できないと分かる. このことから大前提として, 重み付き逆運動学だけでは不十分であり, 優先度付き逆運動学の解法は必要であると言える. 提案方法は, 従来の花房・吉川・中村の方法と同様, 高優先度拘束条件の誤差を全て閾値以下にできている. 同図 (b) は, 低優先度拘束条件の誤差である. 重み付き逆運動学では, 高優先度拘束条件の厳密性が犠牲になる副次的効用として, こちらが低減されることが分かる. また, 重みを増せば優先度付き逆運動学の場合の誤差に漸近することも予想される. 計算時間については, 同図 (c) より, 低優先度拘束条件の誤差が小さいうちは, 提案方法の方が計算が単純な分速いが, これが大きくなると, 提案方法は 1 次収束であるため反復回数が増え, 不利になることが分かる.

試験 2 の結果を図 5 に示す. 同図 (a)(b) より, 高優先度拘束条件が特異点近傍で与えられる, ないし実現不可能になると, 花房・吉川・中村の方法は数値的に不安定になることが分かる. HYN-MP と HYN-SR では挙動にほとんど差がないことから, 計算過程で一部の MP 逆行列を SR 逆行列に置き換えるだけでは解決にならないことも分かる. 一方で提案方法は唯一, 全ての場合において計算に成功している. すなわち, ロバスト性の観点から提案方法の優位性は明確である. またこの状況においては, 計算時間についても同図 (c) より提案方法の方が優位であると言える. ただし, 収

束性が悪化している点は問題として残っている.

5. お わ り に

優先度付き逆運動学の, 乗数法を利用した新たな解法を示した. その特徴は次のようにまとめられる.

- I) 核空間を利用した従来方法が, 逆行列等を求める重い計算を伴っていたのに対し, 提案方法は, 重み付き逆運動学に高優先度拘束条件の誤差累積と Lagrange 乗数推定を追加しただけであり, 実装コストおよび毎ステップの計算コストはほとんど変わらない.
- II) 一般的な逆運動学と同様に優先度逆運動学においても, 高優先度拘束条件を満足する解の存在 (可解性) は保証されず, また可解性を事前に判別することは容易でない. この問題に対し従来方法は脆弱であり, しばしば計算に失敗していた. 一方で提案方法は, 原型となる重み付き逆運動学がロバストであれば, 同様にロバストである. 実際, 試験によって提案方法のみが唯一, 不可解な場合を含む全ての条件で計算に成功した.
- III) 提案方法は, 関節変位を求める計算は超 1 次収束するが, Lagrange 乗数を求める計算は 1 次収束である. すなわち遅い. このため, 状況によってはトータル計算コストの点で従来方法に劣る. 収束性の向上が今後の課題である.

最後に, 優先度付き逆運動学は, 運動に多数の拘束条件, しかもその中には閉リンク機構や外界との接触維持を意味する厳しい条件が課せられながらも, 大自由度を活用して複雑環境内で高度な作業を行うようなロボット (例えば人型ロボット) において特に重要な技術と考えられる. 筆者ら⁽¹³⁾は提案方法を応用し, 膝伸展等の関節可動限界を使いながらも支持領域をロバストに維持し, その中で反力を操作し力学的拘束条件をも満たす伸びやかな動作を設計できるような計算方法を開発している.

謝辞 本研究は, 公益財団法人栢森科学技術振興財団研究助成金 (交付番号: K23 研 XVI 第 355 号) の支援を受けた.

参 考 文 献

- (1) 花房秀郎, 吉川恒夫, 中村仁彦. 関節形ロボットアームの冗長性の解析とその優先順位を有する作業への応用. 計測自動制御学会論文集, Vol. 19, No. 5, pp. 421-426, 1983.
- (2) D. L. Pieper. *The Kinematics of Manipulators under Computer Control*. PhD thesis, Stanford University, 1968.
- (3) M. Raghavan and B. Roth. Kinematic Analysis of the 6R Manipulator of General Geometry. In *Proceedings of The*

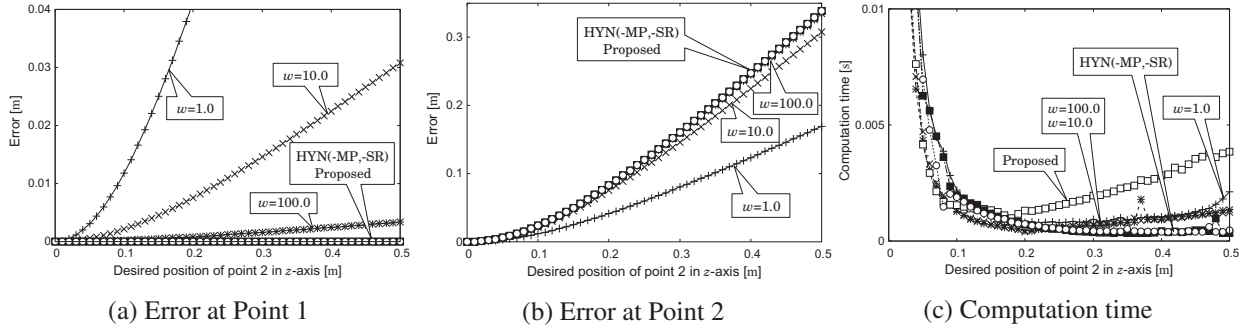


Fig. 4 Result of Test 1

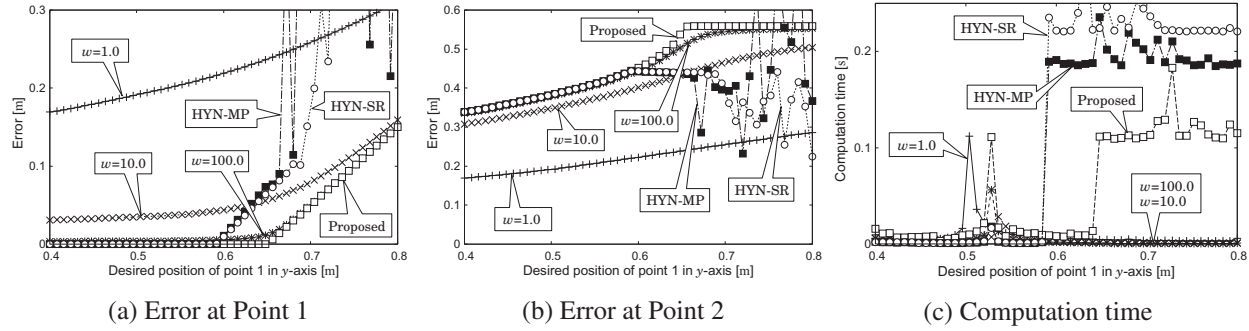


Fig. 5 Result of Test 2

- Fifth International Symposium on Robotics Research*, pp. 263–269, 1991.
- (4) M. Raghavan and B. Roth. Solving Polynomial Systems for the Kinematic Analysis and Synthesis of Mechanisms and Robot Manipulators. *Transaction of the ASME, Special 50th Anniversary Design Issue*, Vol. 117, pp. 71–79, 1995.
- (5) S. Sasaki. Feasibility Studies of Kinematic Problems in the Case of a Class of Redundant Manipulators. *Robotica*, Vol. 13, pp. 233–241, 1995.
- (6) A. A. Maciejewski and C. A. Klein. Obstacle Avoidance for Kinematically Redundant Manipulators in Dynamically Varying Environments. *International Journal of Robotic Research*, Vol. 4, No. 3, pp. 109–117, 1985.
- (7) D. E. Whitney. Resolved Motion Rate Control of Manipulators and Human Prostheses. *IEEE Transactions on Man-Machine Systems*, Vol. 10, No. 2, pp. 47–53, 1969.
- (8) T. Sugihara. Solvability-Unconcerned Inverse Kinematics by the Levenberg-Marquardt Method. *IEEE Transaction on Robotics*, Vol. 27, No. 5, pp. 984–991, 2011.
- (9) M. R. Hestenes. Multiplier and Gradient Methods. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 4, pp. 303–320, 1969.
- (10) M. J. D. Powell. A Method for Nonlinear Constraints in Minimization Problems. In R. Fletcher, editor, *Optimization*, pp. 283–298. Academic Press, 1969.
- (11) 中村仁彦, 花房秀郎. 関節型ロボットアームの特異点低感度運動分解. 計測自動制御学会論文集, Vol. 20, No. 5, pp. 453–459, 1984.

- (12) K. Yamane and Y. Nakamura. Natural Motion Animation through Constraining and Deconstraining at will. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, Vol. 9, No. 3, pp. 352–360, 2003.
- (13) 田中健也, 杉原知道. 運動学的制約の限界でも力学的制約を満たす人型ロボットの運動設計. 第19回ロボティクスシンポジウム予稿集 (採録決定), 2014.

付録:LQ分解によるMP逆行列および核空間基底行列の計算

行列 \mathbf{A} を次のように LQ 分解する.

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{Q} \quad (26)$$

ただし, \mathbf{L} は列フルランク, \mathbf{Q} は行フルランクであることが保証される. また \mathbf{Q} は正規直交行列である. \mathbf{A} の MP 逆行列 (正確には重み付き MP 逆行列) $\mathbf{A}^\#$ は, 次のように求まる.

$$\mathbf{A}^\# = \mathbf{Q}^T(\mathbf{L}^T\mathbf{W}\mathbf{L})^{-1}\mathbf{L}^T\mathbf{W} \quad (27)$$

ただし, \mathbf{W} は正定値重み行列である. また, 核空間基底行列 \mathbf{N} は次のように求まる.

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{A}^\#\mathbf{A} - \mathbf{I} = \mathbf{Q}^T(\mathbf{L}^T\mathbf{W}\mathbf{L})^{-1}\mathbf{L}^T\mathbf{W}\mathbf{L}\mathbf{Q} - \mathbf{I} \\ &= \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} - \mathbf{I} \end{aligned} \quad (28)$$

\mathbf{Q} がフルランクであれば, 正規直交性より $\mathbf{N} = \mathbf{O}$ となる.