

干渉立体を用いた剛体接触力計算の部分分解と反復による高速化

A fast volumetric contact force computation of rigid bodies by decomposition and iteration

張 凱 (阪大) 正 脇坂 尚樹 (阪大) ○正 杉原 知道 (阪大)

Kai ZHANG, Osaka University, kai.zhang@ams.eng.osaka-u.ac.jp

Naoki WAKISAKA Osaka University, naoki.wakisaka@ams.eng.osaka-u.ac.jp

Tomomichi SUGIHARA, Osaka University, zhidao@ieee.org

A fast and stable contact force computation method for rigid-body simulations is proposed. Numerical stability is improved in both time and space by estimating 6-axis contact forces from volumetric intersection of colliding bodies with an error-compensation technique. The linear complementarity problem that approximately resolves the Coulomb-friction constraint is efficiently solved by decomposition and iteration method, which is a variation of projected Gauss-Seidel method.

Key Words: Rigid body simulation, Contact force computation, Projected Gauss-Seidel method

1 はじめに

単一のロボットと少数の物体で構成される実験環境ではなく、人が日常的に活動する環境や災害現場など、現実的な環境でロボットが作業する状況をシミュレートするためには、多数の物体の相互作用を安定に、高精度に、かつできるだけ短時間で計算する必要がある。計算機の性能向上によって物理シミュレーションは身近なものとなったが、上記の三つの要求をバランスよく満たすソフトウェアはいまだ無い。主な困難さは、物体間に働く接触力の計算にある。

接触力は、接触している物体対の微視的な変形により発生する。この変形過程をつぶさに再現する方法 [1, 2] は、局所的な情報のみから計算できるため簡便かつ実装が容易であるが、安定な計算にはマイクロ秒オーダーの離散時間幅が求められ、トータル計算時間は長くなる。一方、接触により理想的に物体対が拘束されるとし、それに伴う拘束力として接触力を計算するいわゆる拘束法 [3, 4, 5, 6] は、一般的にミリ秒オーダーの離散時間幅でも安定に計算を行える。ただし、離散化・量子化の影響で接触が頻繁にチャタリングを起こすこと、接触する物体群の振舞は大規模相補性問題を解くことに帰着するため計算量が大きくなりがちであることの二つが問題であった。

上記二つの問題のうち前者に対して Wakisaka らは、正則化によって接触拘束を緩和することでチャタリングを抑制する方法 [7]、および剛体としてモデル化される物体対の交差形状 (干渉立体) に基づいて本来生じている変形を推定し、比較的高精度に 6 軸接触力を得る方法 [8] を提案している。相補性問題の解法には有効制約法による直接解法を用いている。これは接触点数 n に対し $O(n^3)$ である。後者に対しては、反復解法の一つである射影 Gauss-Seidel 法を用いて計算量を $O(n)$ とする方法が Kokkevis [4]、Erleben [6] により提案されている。これらはチャタリングの問題を解決していない。

本稿では、Wakisaka ら [8] の干渉立体を用いた接触力計算を部分分解と反復解法によって高速に行う方法を新たに提案する。これも射影 Gauss-Seidel 法の一つと言えるが、6 軸接触力に関する制約条件の扱いと、それに伴う射影の方法に独自性がある。

2 干渉立体を用いた接触モデル

本節では、提案方法の基盤となる干渉立体を用いた接触モデル [8] について説明する。

全ての物体形状は凸多面体として表現されるものとする。シミュレーション上では、物体対が理想的に各々の表面で接触することはほとんどありえず、離散化の影響により図 1 のように相互侵入する。このとき、2 物体の干渉立体もまた凸多面体となる。

今、物体 A と B の相互侵入により j 番目干渉立体 Γ_j が形成されているとしよう。実際には 2 物体は相互に圧縮され、接触部には平面が形成される。これを接触平面と呼ぶことにし、その法線ベクト

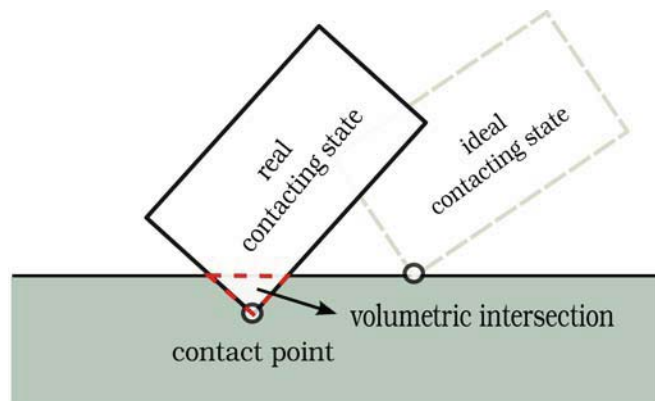


Fig.1 理想的に表面で接触する物体対 (右図) と離散化により相互侵入する物体対 (左図)

ル ν_j を次式で推定する。

$$\nu_j = \text{norm} \left(\sum_{m \in \mathcal{I}_A} S_{j,m} \nu_{j,m} - \sum_{m \in \mathcal{I}_B} S_{j,m} \nu_{j,m} \right) \quad (1)$$

ただし、 \mathcal{I}_A および \mathcal{I}_B は Γ_j をなす面のうち元々物体 A および B に属していた面インデックスの集合、 $S_{j,m}$ および $\nu_{j,m}$ はそれぞれ Γ_j の m 番目面の面積および外向き単位法線ベクトルであり、 $\text{norm}(\mathbf{v})$ は任意の非零ベクトル \mathbf{v} を正規化したものを意味する。また、接触平面は Γ_j の重心 \mathbf{p}_j を通るものとする。

相互侵入を解消するために、 Γ_j の m 番目面上の任意の点 $\mathbf{p}_{j,m}$ が Δt 秒後に次の速度 $\mathbf{v}_{j,m+}$ を持つとしよう。

$$\mathbf{v}_{j,m+} = k_j h_{j,m} \nu_j \quad (2)$$

ただし、 $h_{j,m}$ は $\mathbf{p}_{j,m}$ の接触平面への侵入深さ、 k_j は補償係数である。点群 $\{\mathbf{p}_{j,m}\}$ は同一剛体上にあるため独立に速度を持つことはできない。そこで、次式 (2) で定義される E_j を最小化するように速度拘束条件を緩和する。

$$E_j = \frac{1}{2} \int_{S_{j,m}} \|\mathbf{v}_{j,m+} - k_j h_{j,m} \nu_j\|^2 dS \quad (3)$$

剛体 A, B がそれぞれ速度 \mathbf{v}_{A+} , \mathbf{v}_{B+} および角速度 $\boldsymbol{\omega}_{A+}$, $\boldsymbol{\omega}_{B+}$ を持つならば、 \mathbf{p}_j における両者の 6 軸相対速度は次式で表せる。

$$\hat{\mathbf{v}}_{j+} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{p}_{jA} \times \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{A+} \\ \boldsymbol{\omega}_{A+} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{p}_{jB} \times \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{B+} \\ \boldsymbol{\omega}_{B+} \end{bmatrix} \quad (4)$$

ただし, \mathbf{p}_{jA} , \mathbf{p}_{jB} はそれぞれ物体 A, B 原点に対する Γ_j 重心の位置である. $\mathbf{p}_{j,m}$ における両者の相対速度は次式で表せる.

$$\mathbf{v}_{j,m+} = \mathbf{J}_{j,m} \hat{\mathbf{v}}_{j+} \quad (5)$$

ただし,

$$\mathbf{J}_{j,m} = [\mathbf{1} \quad -(\mathbf{p}_{j,m} - \mathbf{p}_j) \times] \quad (6)$$

とおいた. 式 (5) を式 (3) に代入すれば, 次式を得る.

$$E_j = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{v}}_{j+}^T \mathbf{Q}_j \hat{\mathbf{v}}_{j+} - k_j \boldsymbol{\nu}_j^T \mathbf{C}_j \hat{\mathbf{v}}_{j+} \quad (7)$$

ただし,

$$\mathbf{Q}_j = \int_{S_j} \mathbf{J}_{j,m}^T \mathbf{J}_{j,m} dS \quad (8)$$

$$\mathbf{C}_j = \int_{S_j} h_{j,m} \mathbf{J}_{j,m} dS_j \quad (9)$$

と定義した. これらは Γ_j の幾何情報のみから求まる. 摩擦等の制約の下に E_j を最小化するよう, Γ_j に作用する 6 軸接触力を求める.

3 接触方程式の部分分解と反復解法

3.1 接触方程式とその部分分解

剛体 A が重力および接触力を受け, Δt 秒後に速度, 角速度が \mathbf{v}_{A-} , $\boldsymbol{\omega}_{A-}$ から \mathbf{v}_{A+} , $\boldsymbol{\omega}_{A+}$ に変化したとすると, 次が成り立つ.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{A+} \\ \boldsymbol{\omega}_{A+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{A-} \\ \boldsymbol{\omega}_{A-} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_A \mathbf{1} & -m_A \mathbf{r}_{AG} \times \\ m_A \mathbf{r}_{AG} \times & \mathbf{I}_A \end{bmatrix}^{-1} \hat{\mathbf{i}}_A \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{i}}_A = -m_A \Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{r}_{AG} \times \mathbf{g} \end{bmatrix} + \sum_{j \in \mathcal{I}_{AC}} \hat{\mathbf{i}}_{Aj} \quad (11)$$

ただし, m_A は剛体 A の質量, \mathbf{r}_{AG} は剛体 A 原点に対する重心位置, \mathbf{I}_A は剛体 A 原点まわり慣性テンソル, $\hat{\mathbf{i}}_{Aj}$ は Γ_j に作用する接触力が作る剛体 A 原点まわり 6 軸力積, \mathcal{I}_{AC} は剛体 A に属する干渉立体インデックスの集合, \mathbf{g} は重力加速度である. 上式を次のように変形する.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{A+} \\ \boldsymbol{\omega}_{A+} \end{bmatrix} = \mathbf{c}_{jA-} + \begin{bmatrix} m_A \mathbf{1} & -m_A \mathbf{r}_{AG} \times \\ m_A \mathbf{r}_{AG} \times & \mathbf{I}_A \end{bmatrix}^{-1} \hat{\mathbf{i}}_{Aj} \quad (12)$$

$$\mathbf{c}_{jA-} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{A-} \\ \boldsymbol{\omega}_{A-} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_A \mathbf{1} & -m_A \mathbf{r}_{AG} \times \\ m_A \mathbf{r}_{AG} \times & \mathbf{I}_A \end{bmatrix}^{-1} \hat{\mathbf{i}}_{jA} \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{i}}_{jA} = -m_A \Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{r}_{AG} \times \mathbf{g} \end{bmatrix} + \sum_{k \in \mathcal{I}_{AC}, k \neq j} \hat{\mathbf{i}}_{Ak} \quad (14)$$

剛体 B の運動方程式も同様の形で表せる. 作用反作用の法則により

$$\hat{\mathbf{i}}_{Aj} + \hat{\mathbf{i}}_{Bj} = \mathbf{0} \quad (15)$$

であることに注意し, 式 (12) を式 (4) に代入すれば, 次式を得る.

$$\hat{\mathbf{v}}_{j+} = \hat{\mathbf{v}}_{jA-} - \hat{\mathbf{v}}_{jB-} + (\boldsymbol{\Phi}_{Aj} + \boldsymbol{\Phi}_{Bj}) \hat{\mathbf{i}}_{Aj} \quad (16)$$

ただし,

$$\hat{\mathbf{v}}_{jA-} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{p}_{jA} \times \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{c}_{jA-} \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{Aj} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{p}_{jA} \times \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_A \mathbf{1} & -m_A \mathbf{r}_{AG} \times \\ m_A \mathbf{r}_{AG} \times & \mathbf{I}_A \end{bmatrix} \quad (18)$$

とそれぞれおいた. $\hat{\mathbf{v}}_{jB-}$, $\boldsymbol{\Phi}_{Bj}$ も同様に定義する. 特別な場合として, 剛体 B が慣性系に固定されている場合には式 (16) の代わりに次式を用いる.

$$\hat{\mathbf{v}}_{j+} = \hat{\mathbf{v}}_{jA-} + \boldsymbol{\Phi}_{Aj} \hat{\mathbf{i}}_{Aj} \quad (19)$$

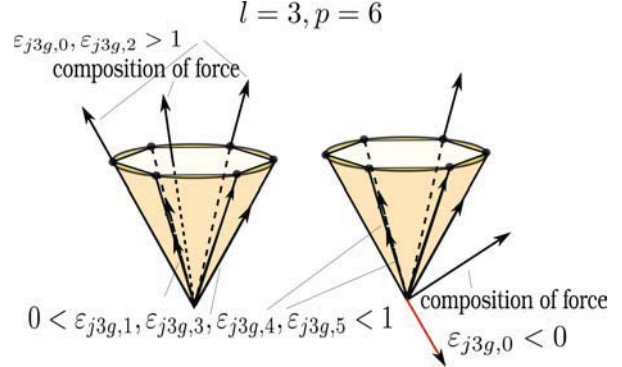


Fig.2 接触力の摩擦円錐 (正多角錐近似) 内への射影

\mathbf{c}_{jA-} , \mathbf{c}_{jB-} は, 定義式 (14) から明らかなように未知の 6 軸接触力積 $\hat{\mathbf{i}}_{Ak}$ ($k \neq j$) を含んでいる. しかし, これらに仮の値を与え, 式 (16) (19) を用いて式 (7) の E_j を最小化すれば, $\hat{\mathbf{i}}_{Aj}$ の暫定値が求まる. Γ_{j+1} については $\mathbf{c}_{(j+1)A-}$, $\mathbf{c}_{(j+1)B-}$ にこれを反映し, 同様の手順を行えば $\hat{\mathbf{i}}_{Aj+1}$ の暫定値が求まる. この手順を反復することで, 全ての 6 軸接触力積が真値に収束すると期待できる. これは Gauss-Seidel 法の考え方にほかならない.

3.2 6 軸摩擦制約条件を満たすための射影

部分分解された式 (7) の E_j を最小化する問題において, 6 軸接触力積 $\hat{\mathbf{i}}_{Aj}$ には摩擦円錐に収まるという制約条件が課される. このことを考慮するために, $\hat{\mathbf{i}}_{Aj}$ を次のように変数変換しよう.

$$\hat{\mathbf{i}}_{Aj} = \sum_{l=1}^L \int_0^{2\pi} \varepsilon_{jl}(\theta) \mathbf{K}(\mathbf{p}_{jl})^T \boldsymbol{\phi}_{jl}(\theta) d\theta \quad (20)$$

ただし, L は Γ_j を接触平面上に射影した多角形の頂点の数, \mathbf{p}_{jl} は Γ_j 重心に対する同多角形の l 番目頂点位置であり, $\mathbf{K}(\mathbf{p}_{jl})$ と $\boldsymbol{\phi}_{jl}(\theta)$ はそれぞれ $\boldsymbol{\nu}_j$ と直交する二つの単位ベクトル \mathbf{e}_{j1} , \mathbf{e}_{j2} と Γ_j の接触平面の静止摩擦係数 μ_{js} を用いて

$$\mathbf{K}(\mathbf{p}_{jl}) = [\mathbf{1} \quad \mathbf{p}_{jl} \times] \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\phi}_{jl}(\theta) = \boldsymbol{\nu}_j + \mu_{js} \cos \theta \mathbf{e}_{j1} + \mu_{js} \sin \theta \mathbf{e}_{j2} \quad (22)$$

と定義した. $\varepsilon_{jl}(\theta)$ は, $\hat{\mathbf{i}}_{Aj}$ を円錐の各母線方向に分解したときの成分に相当する. $\hat{\mathbf{i}}_{Aj}$ が摩擦円錐に収まることは, 上式 (20) を満たす非負の $\varepsilon_{jl}(\theta)$ が存在することと同値である.

摩擦円錐を正 P 角錐で近似すれば [9],

$$\hat{\mathbf{i}}_{Aj} = \sum_{l=1}^L \sum_{p=0}^P \varepsilon_{jlp} \mathbf{K}(\mathbf{p}_{jl})^T \boldsymbol{\phi}_{jl} \left(\frac{2\pi p}{P} \right) = \mathbf{A}_j \boldsymbol{\varepsilon}_j \quad (23)$$

と表せる. ただし,

$$\mathbf{A}_j = [\mathbf{a}_{1,0} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{1,P-1} \quad \mathbf{a}_{2,0} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{L,P-1}] \quad (24)$$

$$\mathbf{a}_{l,p} = \mathbf{K}(\mathbf{p}_{jl})^T \boldsymbol{\phi}_{jl} \left(\frac{2\pi p}{P} \right) \quad (25)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j = [\varepsilon_{j1,0} \quad \cdots \quad \varepsilon_{j1,P-1} \quad \varepsilon_{j2,0} \quad \cdots \quad \varepsilon_{jL,P-1}]^T \quad (26)$$

とおいた. 与えられた $\hat{\mathbf{i}}_{Aj}$ に対し, 上式を満たす全成分が非負の $\boldsymbol{\varepsilon}_j$ が存在すれば, $\hat{\mathbf{i}}_{Aj}$ は摩擦円錐に収まっていると言える.

上記を踏まえ, 次の手順で $\hat{\mathbf{i}}_{Aj}$ を求める.

1. 式 (7) より, 仮の $\hat{\mathbf{v}}_{j+}$ を次式で求める.

$$\frac{\partial E_j}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{j+}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{v}}_{j+} = k_j \mathbf{Q}_j^{-1} \mathbf{C}_j^T \boldsymbol{\nu}_j \quad (27)$$

2. 式 (16) (19) より, 仮の $\hat{\mathbf{i}}_{Aj}$ を次式で求める.

$$\hat{\mathbf{i}}_{Aj} = \begin{cases} (\boldsymbol{\Phi}_{Aj} + \boldsymbol{\Phi}_{Bj})^{-1} (\hat{\mathbf{v}}_{j+} - \hat{\mathbf{v}}_{jA-} - \hat{\mathbf{v}}_{jB-}) \\ \boldsymbol{\Phi}_{Aj}^{-1} (\hat{\mathbf{v}}_{j+} - \hat{\mathbf{v}}_{jA-}) \end{cases} \quad (28)$$

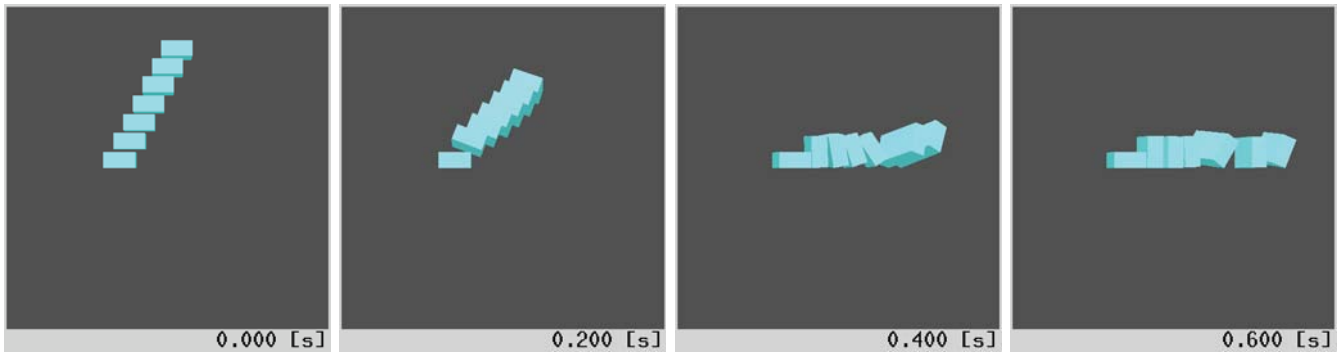


Fig.3 7個の直方体を落下・衝突させるシミュレーション

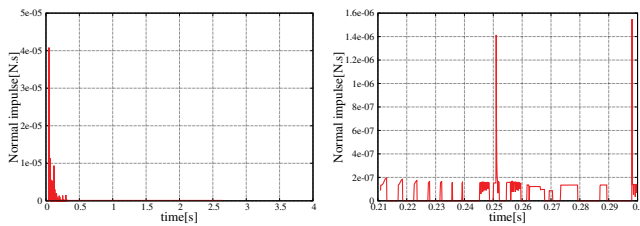


Fig.4 Nakaoka ら [5] の方法による垂直抗力変化

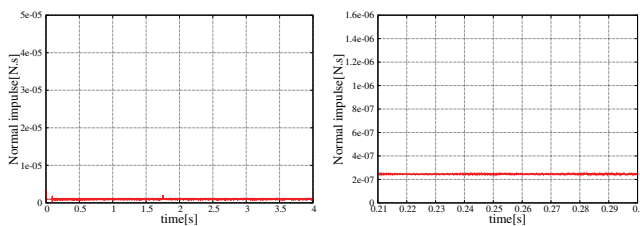


Fig.5 提案方法による垂直抗力変化

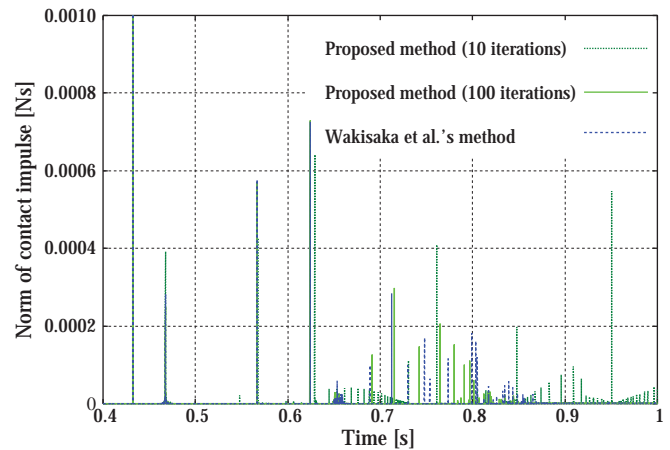


Fig.6 提案方法(反復回数10回/100回)およびWakisaka ら [8] の方法による接触力積ノルム変化

3. 式(23)より, 仮の ϵ_j を次式で求める.

$$\epsilon_j = \mathbf{A}_j^\# \hat{\mathbf{i}}_{Aj} \quad (29)$$

ただし $\mathbf{A}_j^\#$ は \mathbf{A}_j の擬似逆行列を意味する.

4. 上記の仮の ϵ_j のうち負の成分を全て0で置き換え, 改めて式(23)より $\hat{\mathbf{i}}_{Aj}$ を求める.

これにより図2のように, 部分分解された方程式(16) (19)の解が摩擦円錐内に射影される.

4 シミュレーションと評価

提案方法の性能を評価するために, 計算機上でシミュレーションを行った. 使用した計算機のCPUはIntel(R) Core(TM) i7-2720QM 2.20GHz, メモリは8GBである. 干渉判定と干渉立体の計算には, Hasegawa ら [2], Wakisaka ら [8] と同じく GJK 法 [10] および Muller-Preparata [11] 法を用いた. 離散時間幅は $\Delta t = 0.0001s$, 動摩擦係数および静止摩擦係数はそれぞれ0.45, 0.5とした. シミュレーションで用いた直方体はすべて, 形状が $0.2 \times 0.1 \times 0.05m^3$, 質量が $1.0 \times 10^{-3}kg$, 密度は一様である.

4.1 接触力の安定性

乱数的に初期高度・姿勢を設定した n 個 ($n = 10, 20, 30, 40, 50$) の剛体が同時に落下・衝突させるシミュレーションを行った. 図3にスナップショットを示す. 同条件で, 射影 Gauss-Seidel 法を用いる Nakaoka ら [5] の方法でも計算した. 図4, 5は, それぞれにおいて最下にある直方体が地面から受けた垂直抗力の時間変化をプロットしたものである. 前者では静定時にも頻りに垂直抗力が0に

なるチャタリングが起きているのに対し, 後者ではほぼ一定の力が継続的に作用している様子が確認された.

次に, 1個の直方体に初期 z - y - z オイラー角 ($60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$) を与え, 高度1.0mから落下させ地面に衝突させるシミュレーションを, Wakisaka ら [8] の方法および提案方法で行った. 図6は, 直方体に作用した接触力のノルムの時間変化をプロットしたものである. ただし, 衝突直前から静定する前までの期間を抜粋している. 提案方法において, 反復回数が10回程度では静定までに頻りに接触状態が変化しているが, 反復回数を増やすとその傾向は収まり, Wakisaka らの方法で得られる結果に漸近することが確認できた.

4.2 計算時間変化

n 個 ($n = 10, 20, 30, 40, 50$) の剛体を任意の高度・姿勢から同時に落下・衝突させるシミュレーションを Nakaoka ら [5] の方法, Wakisaka ら [8] の方法および提案方法で行った. 提案方法によるスナップショットを図7に示す. 図8は, それぞれの方法で要した計算時間をプロットしたものである. 提案方法は常に Nakaoka らの方法と同程度の時間で接触力を計算できることが確認できた. 物体個数が増えたときの, Wakisaka らの方法に対する提案方法の優位性が明らかになった.

5 おわりに

干渉立体を用いた接触モデルと射影 Gauss-Seidel 法を応用した反復解法を組み合わせることにより, 多数の剛体が相互作用する状況を高速かつ高精度にシミュレートする方法を提案した. 接触力を6軸力積で表現するため, 摩擦制約の扱いに工夫が必要であった. 摩擦円錐を正多角錐で近似し, 接触力積を各母線方向に分解したときの成分が負となったら零に置き換える, という簡便な射影操作で

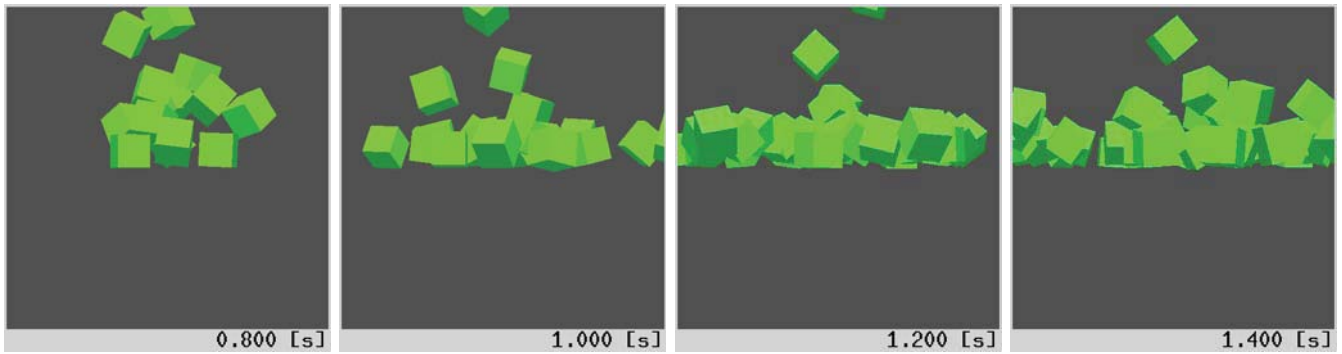


Fig.7 多数の直方体を乱数的に与えた高度・姿勢から同時に落下・衝突させるシミュレーション

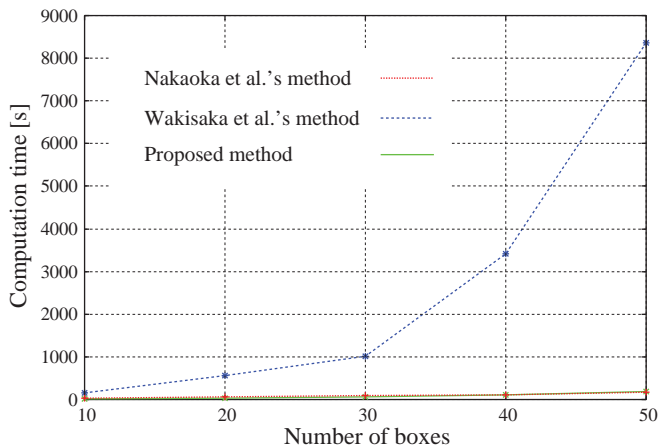


Fig.8 シミュレーション 2:それぞれの方法に要する計算時間

これを解決した。ただし、精度の要求と計算時間の要求いずれが強いかに合わせて反復計算の終了条件を適切に設定する必要がある。この点は今後議論する。

参考文献

- [1] 黄潤權, 近野敦, 小笠原克久, 猪平栄一, 内山勝, ヒューマノイドロボット高速動力学シミュレータの開発, 日本ロボット学会誌, Vol. 23, No. 1, pp. 113–123, 2005.
- [2] S. Hasegawa and M. Sato, Real-time Rigid Body Simulation for Haptic Interactions Based on Contact Volume of Polygonal Objects, Computer Graphics Forum, Vol. 23, No. 3, pp. 529–538, 2004.
- [3] P. Lötstedt, Numerical Simulation of Time-Dependent Contact and Friction Problems in Rigid Body Mechanics, SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing, Vol. 5, No. 2, pp. 370–393, 1984.
- [4] E. Kokkevis, Practical Physics for Articulated Characters, in Proceedings of Game Developers Conference, 2004.
- [5] S. Nakaoka, S. Hattori, F. Kanehiro, S. Kajita and H. Hirukawa, Constraint-based dynamics simulator for humanoid robots with shock absorbing mechanisms, in Proceedings of 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 3641–3647, 2007.
- [6] K. Erleben, Velocity-based shock propagation for multibody dynamics animation, ACM Transaction on Graphics, Vol. 26, No. 2, 2007.
- [7] N. Wakisaka and T. Sugihara, Fast and Reasonable Contact Force Computation in Forward Dynamics Based on Momentum-Level Penetration Compensation, in Proceedings of 2014 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 2434–2439, 2014.
- [8] N. Wakisaka and T. Sugihara, Loosely-constrained volumetric contact force computation for rigid body simulation, in Proceedings of 2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 6428–6433, 2017.
- [9] D. E. Stewart and J. C. Trinkle, An Implicit Time-stepping Scheme for Rigid Body Dynamics with Inelastic Collisions and Coulomb Friction, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 39, pp. 2673–2691, 1996.
- [10] E. G. Gilbert, D. W. Johnson and S. S. Keerthi, A Fast Procedure for Computing the Distance Between Complex Objects in Three-Dimensional Space, IEEE Journal of Robotics and Automation, Vol. 4, No. 2, pp. 193–203, 1988.
- [11] D. E. Muller and F. P. Preparata, Finding the intersection of two convex polyhedra, Theoretical Computer Science, Vol. 7, No. 2, pp. 217–236, 1978.